4 Science Challenge, 24. Wettbewerb

Aufgabe 4: Mathematik

6. Januar 2025

Diese Aufgabe kommt aus dem Bereich der Mathematik. Weitere Informationen zum Studiengang Mathematik findet ihr unter `https://www.maphy.uni-hannover.de/de/studium/im-studium/mathematik`.

Unendlichkeit

Die Unendlichkeit fasziniert die Menschheit schon seit der Antike, z. B. in der unendlichen Ausdehnung des Universums. Auch heutzutage begegnet uns dieser Begriff in vielen Teilbereichen unseres Alltags und wird besonders im mathematischen Kontext sofort mit dem entsprechenden Symbol ∞ gekennzeichnet. Allerdings ergeben sich aus den Überlegungen mit der Unendlichkeit sehr schnell scheinbare Paradoxien, welche allerdings zumeist mathematisch gelöst werden können. Im Folgenden soll sich daher genauer mit dem Konzept der Unendlichkeit befasst werden.

1 Ein Einstieg in die Unendlichkeit

Wir betrachten zwei verschiedene Hotels. Beim ersten Hotel handelt es sich um ein endliches Hotel, es hat hat also endlich viele Zimmer, welche mit den natürlichen Zahlen 1 bis n durchnummeriert sind. Jedes dieser Zimmer ist von einem Gast belegt. Kommt nun ein weiterer Gast, ist für diesen kein Zimmer mehr frei und er muss weggeschickt werden. Betrachten wir nun das gleiche Szenario in einem Hotel mit unendlich vielen Zimmern. Erneut sind die Zimmer mit den natürlichen Zahlen durchnummeriert und alle Zimmer belegt.

1.1 Aufgabe (4 Punkte)

- Ein weiterer Gast erscheint. Wie kann man diesen noch unterbringen? Begründet eure Antwort.
- Ein Bus mit unendlich vielen weiteren Gästen erscheint. Wie viele können noch untergebracht werden? Begründet eure Antwort.

2 Unendlichkeit und Mächtigkeit

Die Unendlichkeit scheint sich unserer Intuition zu entziehen. Daher heißt es aufmerksam zu sein, wenn man mit ihr umgeht. So scheint es in unserem Beispiel eine größere Unendlichkeit zu geben, da wir noch zusätzliche Zimmer zu den bereits belegten unendlichen Zimmern hinzufügen können. Allerdings gilt es auch hier erneut aufzupassen. Vergleichen wir daher verschiedene unendliche Mengen: Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist unendlich groß. Wie sieht es aber mit der Menge der Quadratzahlen $Q = \{n^2 | n \in \mathbb{N}\}$ aus? Ist diese auch unendlich groß? Und ist sie sogar gleich groß wie $\mathbb{N}$? Dies können wir überprüfen, indem wir eine Zuweisung der natürlichen Zahlen zu den Quadratzahlen durchführen.

$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow 1^2 = 1 \\ 2 &\leftrightarrow 2^2 = 4 \\ 3 &\leftrightarrow 3^2 = 9 \\ &\quad ... \end{aligned}$$

Wir können also eine Abbildung finden, welche **jeder** natürlichen Zahl **eine eindeutige** Quadratzahl zuordnet. Das heißt, diese beiden Mengen sind gleich groß bzw. besitzen die gleiche **Mächtigkeit**. Diese Zuordnung lässt sich mathematisch präziser anhand der Abbildung f:$\mathbb{N} \to Q : n \mapsto n^2$ formulieren.

2.1 Aufgabe (6 Punkte)

a) Überprüft die Mächtigkeit von $\mathbb{Z}$ im Vergleich zu $\mathbb{N}$. Lässt sich hier ebenfalls eine entsprechende Abbildung finden?

b) Findet eine weitere Zahlenmenge, welche die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$ besitzt. Begründet eure Antwort.

Besitzt eine Menge die gleiche Mächtigkeit wie die natürlichen Zahlen, so spricht man von einer **abzählbar unendlichen** Menge.

3 Unendlichkeit und Grenzen

Beim Umgang mit Unendlichkeit verliert das Konzept der letzten Zahl seine Bedeutung, da es keine letzte Zahl gibt. Aber lässt sich vielleicht trotzdem in manchen Fällen eine Aussage über das Grenzverhalten finden? Die Auflistung der Zimmernummern aus Aufgabenteil 1 lässt sich mathematisch schreiben als:

- Für das Hotel mit endlich vielen Zimmern (1, 2, 3, . . . , n)
- Für das Hotel mit unendlich vielen Zimmern (1, 2, 3, . . .)

Diese Konstrukte nennt man Folgen. Eine beliebige Zimmernummer wird dabei Folgenglied bezeichnet. Allgemeiner lassen sich diese Folgen durch eine Folgenvorschrift definieren (ähnlich zu den bereits bekannten Funktionen).

$$(e_i)_{i=1,...,n} = (1, 2, 3, ..., n) \tag{1}$$
$$(u_i)_{i\in\mathbb{N}} = (1, 2, 3, ...) \tag{2}$$

Anhand der Anzahl der Zimmer wissen wir ebenfalls, dass (e_i) eine endliche Folge und (u_i) eine unendliche Folge ist. In diesem Beispiel ist die Betrachtung dieser unendlichen Folge nicht spannend, da wir bereits wissen, dass die Folgenglieder immer größer werden, und wir nicht wissen, wie das letzte aussehen wird. Bei einigen unendlichen Folgen lässt sich jedoch trotzdem erkennen, dass sie gegen einen finalen Wert streben. Dieser wird als Grenzwert bezeichnet. Mathematisch sagt man, dass die Folge gegen den Grenzwert **konvergiert**. Ein einfaches Beispiel ist hier die unendliche Folge:

$$a_i = 1/i \qquad \text{für i} \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Zeichnen wir uns die ersten 50 Folgenglieder in einem Graphen ein (vgl. Abb. 1), so fällt schnell auf, dass die Folgenglieder immer kleiner werden und auf die 0 zustreben. Dementsprechend ist hier 0 der Grenzwert. [1]

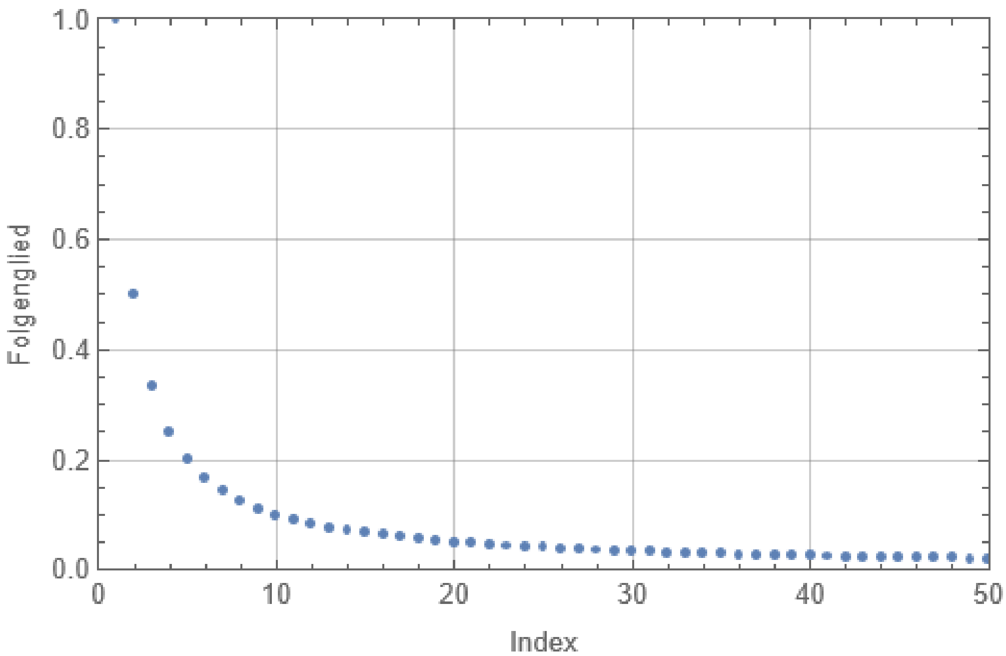

Abb. 1: Plot der Folge a_i

Offensichtlich lassen sich solche Graphen allerdings nicht für unendlich viele Indizes anfertigen. Man betrachtet mathematisch den **Limes**. Dabei wird der Index in der Folgenbeschreibung unendlich nah an einen bestimmten Wert streben lassen (konzeptuell wird dieser Wert allerdings nicht vollständig angenommen).

$$\lim_{i \to \infty} a_i = \lim_{i \to \infty} \frac{1}{i} = 0$$

Strebt die Folge **nicht** nicht gegen einen solchen Grenzwert, so spricht man von einer **divergenten** Folge. Ein Beispiel hier ist die eingangs verwendete unendliche Folge mit den Zimmernummern, denn ∞ ist keine Zahl im eigentlichen Sinne. Dementsprechend ist sie kein Grenzwert und Folgen, die gegen unendlich streben, gelten als divergent.
Bei der Grenzwertbetrachtung von komplizierteren Folgenvorschriften mit Exponent ist es wichtig, darauf zu achten, dass der höchste Exponent den Verlauf der Folge dominiert.

[1] Im Studium eines MINT-Faches lernt ihr eine mathematisch exakte Definition des Grenzwertbegriffs kennen. Diese wollen wir hier nicht behandeln.

Daher müssen derartige Folgenvorschriften durch schlaues Ausmultiplizieren vereinfacht werden, um den Grenzwert ermitteln zu können.

3.1 Aufgabe (10 Punkte)

Untersucht die Folgen auf Grenzwerte. Konvergieren sie gegen einen Grenzwert oder divergieren sie? Begründet eure Antworten. Es handelt sich hierbei um unendliche Folgen, also für alle $n \in \mathbb{N}$

- $a_n = 2^{-n}$
- $a_n = (-1)^n$
- $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
- $a_n = \frac{2n^3-3}{3n^3+7}$
- $a_n = \frac{n^3-3}{4n^4+7}$

4 Die unendliche Reihe

Eine spezielle Form der Folge ist die unendliche Reihe. Sie wird aus den Summen der Folgenglieder einer anderen Folge (a_n) gebildet. Diese werden auch als **Partialsummen** bezeichnet.

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\dots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Die einzelnen Summenglieder werden als **Partialsumme** bezeichnet. Dies lässt sich schneller mit dem Summenzeichen $\sum$ schreiben:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 ... a_n$$

Hierbei gibt i=1 den Startindex an, also den ersten Wert, den wir einsetzen, und oberhalb des Summenzeichen steht der letzte. Beachtet hierbei, dass die Indizes nur natürliche bzw. manchmal auch ganze Zahlen sind. Es werden daher keine rationalen oder reellen Zahlen als Index verwendet.
Auch bei Reihen ist es von großem Interesse, ob sie konvergieren oder nicht. Ähnlich zu den Folgen schreibt man:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \tag{4}$$

Solltet ihr später ein MINT-Fach studieren, werdet ihr viele Kriterien kennenlernen, um zu überprüfen, ob Reihen konvergieren oder divergieren. Hier wollen wir uns aber nur mit einem berühmten Beispiel einer konvergenten Reihe beschäftigen. Die geometrische Reihe hat eine wohldefinierte Summe:

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q} \tag{5}$$

Dies gilt allerdings nur, solange $|q| < 1$ ist.

4.1 Aufgabe (3 Punkte)

Berechnet die Summe der Reihe und begründet eure Antwort:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots \tag{6}$$

4.2 Aufgabe (3 Punkte)

Zeigt mithilfe der geometrischen Reihe, dass $0{,}\bar{9} = 1$.

4.3 Aufgabe (4 Punkte)

Zwei Läufer treten bei Olympia an. Der erste Läufer hat zu Beginn einen großen Sprint hingelegt und hat nun einen Vorsprung von 100 m vor dem anderen Läufer. Allerdings ist der erste Läufer durch den Sprint sehr ausgelaugt, weswegen er nur noch mit 1 $\frac{m}{s}$ läuft, wohingegen der zweite Läufer noch gut ausgeruht ist und eine Geschwindigkeit von 2 $\frac{m}{s}$ hält.
Der Philosoph Zenon behauptet, dass die beiden Läufer sich nie einholen werden, da der zweite Läufer erst mal den Punkt einholen muss, den der erste als Vorsprung hatte. In dieser Zeit ist er allerdings erneut ein Stück weiter gelaufen. Dieser Vorgang wiederholt sich unendlich oft, sodass der erste Läufer nie eingeholt werden kann.

- Modelliert das Problem mathematisch und zeigt anhand der geometrischen Reihe, warum die Aussage von Zenon falsch ist.

Allgemeine Hinweise
Einsendeschluss: Sonntag, 02. Februar 2025, 19:59 Uhr

Gebt eure Lösungen über Stud.IP ab: `https://studip.uni-hannover.de`

Das zulässige Dateiformat für die zusammengeschriebene Lösung (mit eingebetteten Bildern) ist PDF. Bitte ladet eure Dateien rechtzeitig hoch.

Gebt innerhalb der Datei euren Teamnamen, die Namen der Teammitglieder sowie deren Schulen an. Benennt eure Datei nach folgendem Schema: „Teamname_Aufgabe4".

Das Hochladen funktioniert wie folgt:

Loggt euch mit den bei eurer Anmeldung zur 4 Science Challenge angelegten Zugangsdaten auf der Stud.IP-Seite ein (bitte nutzt dazu den „Login ohne WebSSO"). Geht dann auf „Meine Veranstaltungen" und auf die 4 Science Challenge 2024/2025. Geht dann oben auf „Dateien" und auf den Ordner „Upload Aufgabe 4". Dort könnt ihr entweder über „Dokument hinzufügen" oder über „Dateien hochladen" eure Lösungsdatei hochladen.

Wenn ihr die Datei hochgeladen habt, öffnet sich ein Fenster, in dem u. a. nach Lizenzinformationen gefragt wird. Dieses braucht ihr nicht weiter zu beachten und könnt einfach auf „Speichern" klicken. **Bitte achtet darauf, dass ihr eure Dateien wirklich innerhalb des Ordners „Upload Aufgabe 4" hochladet und nicht außerhalb davon, da ansonsten die anderen Teams eure Dateien sehen können.**
Die Teilnahmebedingungen und weitere Informationen findet ihr unter `www.uni-hannover.de/4sciencechallenge`

Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.